

Операторы линейны — операторы линейны
 $\det B \neq 0$, m.k. $e_1 \dots e_m$ — базис $\Rightarrow \exists!$ матрица $C_1 \dots C_m$
 так $e_1 \dots e_m$ — ОНБ, то $C(e_i, e_j) = C_j = (x, e_j)$

$$C_m(e_m, e_m) = C_m = (x, e_m)$$

$(x, e_i) = C_i$ — координаты x в базисе V_0
 $x_i = \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j$

$$C(x, V_0) = |x - \sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i|$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq |x_1|^2$$

$$|x_1|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^m (x, e_i)^2 \leq |x|^2$$

Получаем неравенство: $\sum_{i=1}^m (x, e_i)^2 \leq |x|^2$ равно верно

Теорема. Линейные операторы в единичных нормах.

§1. Сравнимый оператор

Пусть V — единичная норма (векторная норма); $A: V \rightarrow V$ — оператор.

Определение. $A^*: V \rightarrow V$ называется сопряженным к A , если $\forall x, y \in V \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$.

Пример

1) $Ax = x \times a, a \in \mathbb{R}^3$
 $\forall y \in \mathbb{R}^3 \quad (Ax, y) = (x \times a, y) = (a, y \times x) = (a, y, x) = (x, y \times a) = (x, Ay) = (x, -A^*y)$
 т.е. сопряженный оператор $A^* = -A$.

2) $C_0^\infty[a, b]$ — банахово пространство с нормой, заданной на простых функциях

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$A = \frac{d}{dt} \quad (f, Ag) = \int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt = -(f, g)$$

$$\text{т.е. } A^* = -\frac{d}{dt}$$

$$\frac{e_{m+1} \dots e_n}{\dim V_0^\perp} = \dim V - \dim V_0 = m$$

или

$$x_1 \in V_0^\perp, x_2 \in V_0$$

или

$$x_1 \in V_0^\perp, x_2 \in V_0$$

или

или

или

или

или

или

или

или

или

или

или

или

или

Линия

Сопеределитель оператор

Формула: $y_1, y_2 \in V$

по определению сопр. оператора

$$(A^*y_1 + y_2) = (x, A^*(y_1 + y_2))$$

$$(A^*y_1 + y_2) = (A^*y_1 + y_2) + (x, A^*y_2) = (x, A^*y_1 + A^*y_2)$$

$$\forall x \in V \Rightarrow A^*(y_1 + y_2) = A^*y_1 + A^*y_2$$

$$A^*(x, y) = LA^*y$$

Для любого линейного оператора $A: V \rightarrow V$ существуют сопр. оператор

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow (x, A^*y) = (x, A^*y)$$

Оператор A^* как аджункт оператор A

$$(x, A^*y) = x^T A^* y$$

Симметричность

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

$$\forall x, y \in V \Rightarrow x^T A y = x^T A^T y \Rightarrow Ay = A^T y \quad \forall y$$

$$A^* = A^T$$

$$(Ax, y) = (x, A^T y) = x^T A^T y$$

$$(x, Ay) = x^T A y = x^T A^T y$$

Взаимность сопр. операторов

- 1) $(A^*)^* = A$
- 2) $(AB)^* = B^* A^*$
- 3) $(A+B)^* = A^* + B^*$
- 4) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
- 5) $E^* = E$

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow (A^*x, y) = (x, Ay)$$

$$x \leftrightarrow y \quad (A^*x, y) = (x, Ay)$$

Универсальность

$$rk A = rk A^*$$

$$A^* = (A^T)^T$$

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

$rk A = \dim Im A$ - ранг линейного оператора

$$rk(A) = \dim ker A$$

Се. $rk A$ и $rk A^*$

Теорема

Для линейного оператора $A: V \rightarrow V$ справедливы

$$rk A = rk A^* \quad m.e. \quad Ax = 0 \Rightarrow A^*x = 0$$

$$ker A = Im A^* \quad m.e. \quad \exists y_1 \in V \quad A^*y_1 = y$$

$$ker A = Im A^* \quad m.e. \quad (Ax, y) = 0 \Rightarrow x \in Im A^*$$

$$x \in ker A \Rightarrow x \in (Im A^*)^\perp \quad m.e. \quad ker A \in (Im A^*)^\perp$$

$$\dim V = \dim Im A + \dim ker A = \dim Im A + \dim (Im A^*)^\perp = \dim Im A + (n - \dim Im A^*)$$

$$ker A = (Im A^*)^\perp$$

$$ker A = (Im A^*)^\perp$$

§4. Канонический базис

Лемма 1

Собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1 (± 1 в вещ. случае) (в кан. ортонорм. базисе базисные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны).

Доказ.: Пусть U -унитарный (орнал.) оператор, x - собств. вектор при скал. знач. λ .

$$\text{Положим } (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) \stackrel{U^*U=I}{=} \lambda \overline{\lambda} (x, x) \\ \text{С другой стороны } (Ux, Ux) = \left(\frac{U^*U}{\overline{\lambda}} x, x \right) = (x, x)$$

$$\text{Следовательно } \lambda \overline{\lambda} = 1, \text{ т.е. } |\lambda| = 1.$$

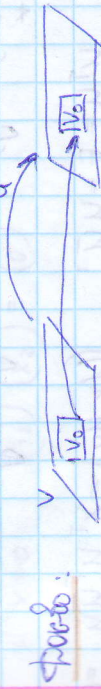
$$\text{Если } Ux = \lambda x, Uy = \mu y; \lambda \neq \mu, x \neq 0, y \neq 0 \\ (x, y) = (Ux, Uy) = (\lambda x, \mu y) = \lambda \overline{\mu} (x, y) \\ \text{но } \lambda \overline{\mu} \neq 1 \quad |\lambda| = |\mu| = 1$$

$$\lambda = e^{i\varphi}, \mu = e^{i\psi} \\ \lambda \overline{\mu} = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\psi} = e^{i(\varphi - \psi)}$$

$$\text{Если } \lambda \neq \mu, \lambda \overline{\mu} = 1, \text{ то } \varphi = \psi \text{ и } \lambda = \mu \\ \text{нормализуем } (x, y) = 0$$

Лемма 2

Пусть $V_0 \subset V$ -инвариантное подпространство унитарного оператора $U: V \rightarrow V$. Тогда ортал. дополнение $V_0^\perp$ также инвариантно относительно U .



$$U(V_0) \subset V_0 \text{ инвариантное подпространство} \\ V_0^\perp = \{ v \in V \mid (x, v) = 0 \quad \forall x \in V_0 \}$$

Ортогональное дополнение $U_1 = U|_{V_0}$ также унитарно. (сохр. длины на $V \Rightarrow$ сохр. длины на V_0)

Максимум единиц отличен от оператора. т.е. $\det U \neq 0$, но произведение вектор $x \in V_0$ ненулевых векторов $x = Ux_1, \dots, Ux_n$ у кратно n раз.

$$\text{Пусть } (x, Ux) = (Ux, Ux) = (x, U^2x) = 0 \\ \text{т.е. } U^2 \in V_0^\perp, \text{ но } \text{орбита } U^2x \in V_0^\perp, \text{ т.е. } U(U_0^\perp) \subset V_0^\perp$$

Теорема (о каноническом базисе унитарного оператора)

Каждый унитарный оператор унитарно эквивалентен. Вектор x орб. в базисе канонического оператора имеет произвольный вид

$$x = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} \\ \vdots \\ e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad |\lambda_i| = 1$$

Комплексная ортогонализация

Любая унитарная матрица унитарно эквивалентна матрице, в которой все элементы по диагонали равны ± 1 .

Доказ.: Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ -с.знач. U , $e_1, \dots, e_n$ -базис вектор, $|e_i| = 1$

Вспомогат. $v_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + \lambda_i e_i)$ взаимно ортогональны. $v_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + \lambda_i e_i) \rightarrow$ орб. v_2

§5. Канонический базис ортал. оператора. Теорема Хаусдорфа

$$OO^T = O^T O = E \Rightarrow (\det O)^2 = 1$$

Ор. Ортогональное преобразование на евклидовом пространстве, $\det O = \pm 1$

$$a) \text{ ортогональный базис } \dim V = 2 \\ \text{Пусть } e_1, e_2 - \text{орб. } V \\ O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ матрица ортал. преобраз. в } \mathbb{R}^2$$

1) $ad-bc=1$, тогда $O^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
 C другой стороны $O^{-1} = O^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, т.е. $O = \begin{pmatrix} a & -c \\ b & d \end{pmatrix}$
 т.е. $\det O = a^2 + c^2 = 1 \quad \exists \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
 $a = \cos \varphi \quad c = \sin \varphi$

т.е. соответствующее ортонормированное базисное ОНБ (базис) состоит из векторов x_1, x_2 соответствующих $Ox_1 = x_1, Ox_2 = -x_2$

2) $ad-bc = -1$
 характеристическое уравнение $\lambda^2 - (a+d)\lambda - 1 = 0$ имеет два корня λ_1, λ_2 . Так как O - орт. преобр., то $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Пусть x_1, x_2 - соответствующие векторы. Они ортонормированы. Действительно $Ox_1 = x_1, Ox_2 = -x_2$
 $(x_1, x_2) = (Ox_1, Ox_2) = (x_1, -x_2) = -(x_1, x_2)$
 Взяв x_1, x_2 с р. $|x_1| = |x_2| = 1$, т.е. в базисе x_1, x_2 преобразование O имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (т.е.) зеркальное отражение в плоскости. В кр. $\dim V = 1 \quad \forall x \quad Ox = \lambda x \quad \lambda = \pm 1$

3) орт. преобр. существует $\dim V = 1 \quad \forall x \quad Ox = \lambda x \quad \lambda = \pm 1$

Теорема (о каноническом виде матрицы орт. оператора)
 Для любого орт. оператора O существует базис e_1, e_2 в котором матрица оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Лемма

У любого вещественного оператора A в базисе e_1, e_2 существует инвариантное подпространство L размерности 2.

Доказ: Пусть u и v - собственные векторы A с собственными значениями λ_1, λ_2 . Тогда $v(\lambda_1) = \lambda_1 v$, $v(\lambda_2) = \lambda_2 v$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то u, v - линейно независимы. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то u, v - линейно зависимы. Тогда u, v - базис L . В этом базисе матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$$\frac{A^T}{A} = A \text{ в } \text{векторном пространстве}$$

Доказано:

$$m.k. \quad A^* = A^T \quad (A^* = \overline{A^T})$$

□

Теорема (канонический базис самосопряженного оператора)

В нормированном ОВ линейного самосопряженного оператора существует базис, состоящий из взаимно ортогональных векторов.

Лемма 1

Собственные значения самосопряженного оператора вещественны. Собств. векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказано:

① Пусть канонический базис

$$\text{Если } Ax = \lambda x, \text{ то } (Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) \\ \text{С другой стороны } (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(x, \lambda x)} = \overline{\lambda(x, x)} \\ \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

② Пусть канонический базис

$$\text{Пусть } A = \alpha + i\beta \\ \text{Мы рассмотрим следующее линейное пространство} \\ \begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (Ax, y) = (\alpha x - \beta y, y) = \alpha(x, y) - \beta(y, y) \\ (x, Ay) = (x, \beta x + \alpha y) = \beta(x, x) + \alpha(x, y)$$

$$\beta(x, x) + \beta(y, y) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Проверим ортогональность векторов, соответствующих различным значениям.

$$\text{Если } Ax = \lambda x, Ay = \mu y, \lambda \neq \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y) \Rightarrow (x, y) = 0$$

□

Лемма 2

Пусть A - самосопряженный оператор. V_0 - орт. подпространство. Тогда $V_0^\perp$ - тоже инвариантное подпространство.

$$\text{Доказано: Если } x \in V_0, y \in V_0^\perp, \text{ то } (Ax, y) = 0 \\ \text{Но } (Ax, y) = (x, Ay) = 0, \text{ т.е. } Ay \in V_0^\perp \Rightarrow Ay \in V_0^\perp \\ \text{Значит, } A(V_0^\perp) \subset V_0^\perp$$

□

Положим $\lambda_1 = 1$, но $\lambda_1 \neq 1$ - собственное значение. Тогда $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, λ_1 - соб. значение.

$$\text{Пусть } |\lambda_1| = 1, V_1 = V_0^\perp = \{x \mid (x, \lambda_1 x) = 0\} \\ V = V_0 \oplus V_1$$

Пусть V_0 - инвариантное подпространство A .

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Пусть $A|_{V_1}$ самосопряженный оператор. Тогда $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ - собственные значения $A|_{V_1}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $e_2, \dots, e_n$ - соб. векторы, $|e_i| = 1$.

Итак, найдем канонический базис $e_1, \dots, e_n$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

§5. Преобразование квадратичных форм к каноническому виду

Пусть $Q(x)$ - бинарная квадратичная форма

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$A = A^T$ - симметричная матрица, матрица кд формы

$$Q(x) = x^T A x$$

Преобразование кдд форм

Пусть e' - "новый базис", C - матрица перехода

$$[e', e_n]^T = [e, e_n]^T C$$

Пара канонич. вектора

$$x = Cx' \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = x'^T C^T A C x', \text{ тогда } A' = C^T A C$$

Преобразование (о приведении кд форм к каноническому виду)

Любая бинар. кдд форма ортогональным преобразованием $X = QY$ может быть приведена к виду $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

(Отметим ст. Ламарка: приведение к каноническому виду не производится, а ортогональным преобразованием; λ_i определяются однозначно)

Доказ: Рассмотрим форму ортогонально сопоставляется матрица кдд, она симметричная

По теореме о канон. виде $\exists$ онб y собств. векторов, в которых матрица имеет диаг. вид

$$Q^T = Q^{-1} \quad X = QY$$

$$Q = Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Преобразование пары форм к каноническому виду

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2$$

$$r(x) = x_1 x_2$$

Пример

Пусть $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ - две кдд формы, причем $Q_1(x)$ невырожденная, т.е. $Q_1(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$. Тогда $\exists$ базис, в котором обе формы одновременно приведены к каноническому виду $Q_1 = y_1^2 + \dots + y_n^2$, $Q_2 = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

Доказ:

Пусть A - матрица кдд формы Q_1 . Выберем канонический базис $e_1, \dots, e_n$ для A . Тогда $Q_1(x) = (Ax, y)$ - это бинар. м.к. форма канонич. базиса

Пр-во V ставит "вырожденные" стобы в эк пр-е $(x, y)^T$. Найдем онб (в смысле эк пр-е $(\cdot, \cdot)$) $e_1, \dots, e_n$, в котором $Q_2(x)$ принимает канонический вид. Тогда же базис $J(x, x)_1 = (Ax, x) = Q_1(x) = \sum x_i^2$

Пример (пары о паре форм)

Бинар. каноническая система с n степенями свободы

$$T = \frac{1}{2} (Aq, q) \quad \text{— кин. энергия}$$

$$L = T - U$$

Можно одновременно перейти к каноническому виду, заменив Q на Q_1

$$T = \frac{1}{2} \sum \dot{q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum \lambda_i q_i^2$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$A(q, \dot{q})$$

$$U = \frac{1}{2} (B(q), q) \quad \text{— пот. энт.}$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum \lambda_i q_i^2$$

§6. Самопрямые операторы: "Керно" у оператора.

Лемма

Линейный оператор S унитарен тогда и только тогда, когда $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in V$.

Доказательство: $(\Rightarrow)$ из унитарности

Если A - унитарен, то $(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax)$, т.е. $(Ax, x) = \overline{(Ax, x)} \Rightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ обратное: пусть $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in V$.

Пусть $(Ax, x) = (x, Ax)$, т.е. $(Ax, x) = (x, A^*x)$, т.е. $(x, (A - A^*)x) = 0$ для всех $x \in V$.

Унитарность. Если S унитарен, то $(Sx, Sx) = (x, x) = 1$ для всех $x \in V$, т.е. $(Sx, Sx) = 1$.

но унитарно: $(S(y+z), S(y+z)) = 1 \Rightarrow (By, y) + (Bz, z) + (By, z) + (Bz, y) = 1$
 $(S(iy+z), S(iy+z)) = 1 \Rightarrow (By, y) - i(Bz, y) + i(By, z) + (Bz, z) = 1$

находим $(Bz, y) + (By, z) = 0$
 $(-i(Bz, y) + i(By, z)) = 0 \Rightarrow (By, z) = (Bz, y)$

$(By, z) = 0$ для всех $y, z \in V \Rightarrow B = 0$ $\square$

Тогда лемма утверждает, что самопрямые операторы являются о. унитарными.

Для самопрямых операторов A и B (нормированных) $(Ax, x) \geq 0$ для всех $x \in V$.

Обозначение $A > 0$ ($A \geq 0$).

Примеры (о себе самих)

Самопрямые операторы A и B (нормированные) $A > 0$ ($A \geq 0$) $\Leftrightarrow$ все его собственные значения $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$).

Понятие: положителен при $A > 0$

Если $A > 0$, то $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$.
 Если A - самосопряженный, то $(Ax, x) = \sum \lambda_i |x_i|^2$, где λ_i - собственные значения.

Если A - самосопряженный, то $\exists$ ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ такой, что $Ae_i = \lambda_i e_i$, где λ_i - собственные значения.

Среднее

Если $A > 0$ (или $A < 0$), то A обратим, т.е. $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0$.

Оператор (керно) у оператора

Если $A > 0$, то $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$.
 Если A - самосопряженный оператор, то $B > 0$ тогда, когда $B^2 = A$.

Понятие: самосопряженный оператор B .

Если $Ae_i = \lambda_i e_i$, то $B^2 e_i = \lambda_i^2 e_i$, т.е. $B e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$.
 Если $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то $B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Если $B > 0$, то $B^2 > 0$, само сопряжен.

$B^2 e_i = \lambda_i^2 e_i = A e_i$.

Примеры: самосопряженный оператор C , $C^2 = A$.

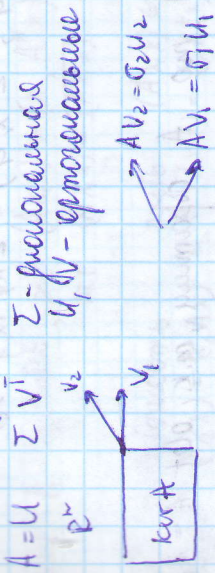
Если $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то $C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, т.е. $C^2 = A$.

Задача

Дано, что можно выбрать корень моды
 $\theta = \sqrt[m]{A}$, $m \in \mathbb{Z}$

Сingular value decomposition

$A = U \Sigma V^T$ (singular value decomposition)



$$A [V_1 \dots V_r \dots V_{r+1} \dots V_n] = [U_1 \dots U_r \dots U_m]$$

$$A [V_1 \dots V_r \dots V_{r+1} \dots V_n] = [U_1 \dots U_r \dots U_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_r & \\ & & 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T = U \Sigma V^T$$

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T \rightarrow V - CB \text{ and } A^T A$$

$$A^T A = U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U \Sigma^2 U^T \rightarrow U - CB \text{ and } A^T A$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{pmatrix}$$

$$e.g. \text{char } 32 \quad CB \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$e.g. \text{char } 18 \quad CB \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Сingular value decomposition

$$A = U \Sigma V^T$$

Сingular value decomposition (SVD) is a way to decompose a matrix into three matrices: U , Σ , and V^T . The matrix U is orthogonal, Σ is diagonal, and V^T is orthogonal. The diagonal elements of Σ are the singular values of A .

Properties

For a given matrix A , the SVD is unique up to the sign of the singular values. The matrix U is orthogonal, Σ is diagonal, and V^T is orthogonal. The diagonal elements of Σ are the singular values of A .

$$A V_k = \begin{cases} \sigma_k U_k, & k=1, \dots, r \\ 0, & k=r+1, \dots, m \end{cases}$$

$$A^T U_k = \begin{cases} \sigma_k V_k, & k=1, \dots, r \\ 0, & k=r+1, \dots, m \end{cases}$$

Applications of SVD

For a given matrix A , the SVD is unique up to the sign of the singular values. The matrix U is orthogonal, Σ is diagonal, and V^T is orthogonal. The diagonal elements of Σ are the singular values of A .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_r & \\ & & 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

rank of matrix $m \times n$

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} V^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 996 & 172 \\ 328 & 996 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 98 \\ 98 & 96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Доказ.

1) Пусть оператор A^*A и AA^* самосопряженный, т.е.

$$A^*A = (A^*A)^* \quad \forall x \in V \quad \forall y \in U \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$$

$$A^*: U \rightarrow V$$

$$A^*A: V \rightarrow V$$

$$AA^*: U \rightarrow U$$

$$A^*A \in L(V, V) \\ AA^* \in L(U, U)$$

б) A^*A и AA^* - самосопряженные операторы, т.к.

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A \\ (AA^*)^* = AA^*$$

в) $A^*A \geq 0$ и $AA^* \geq 0$, т.к.

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0 \\ (AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) \geq 0$$

г) Пусть оператор A^*A есть оператор $V_1 \dots V_n$, т.е. $A^*A = t$ и $V_1, \dots, V_n$ — собственные значения t оператора A^*A . Тогда $t \geq 0$, т.к. $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0$.

$$\begin{cases} A^*AV_k = \sigma_k^2 V_k, & k \neq 0 \\ A^*AV_k = 0, & k = 0 \end{cases}$$

д) Пусть оператор AA^* самосопряженный, т.е.

$$(AA^*u, v) = (AA^*v, u) = (A^*u, A^*v) = (A^*v, A^*u) = (A^*A^*v, u) = (AA^*v, u)$$

е) Пусть оператор AA^* самосопряженный, т.е.

$$t = r$$

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_k^2} \\ \sigma_k > 0 \quad k=1, \dots, r \quad |A| = \sigma_k \\ \text{если } u_k = \frac{1}{\sigma_k} A^*v_k$$

$$\text{если } \begin{cases} A^*v_k = \sigma_k u_k \\ A^*v_k = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k=1, \dots, r \\ k > r \end{cases}$$

б) Пусть оператор AA^* самосопряженный, т.е.

$$(AA^*u, v) = (AA^*v, u) = (A^*u, A^*v) = (A^*v, A^*u) = (A^*A^*v, u) = (AA^*v, u)$$

$$\text{если } k > r+1, \text{ тогда } AA^*u_k = 0 \Rightarrow u_k^* AA^* u_k = 0 \Rightarrow (A^*u_k^*)(A^*u_k) = 0 \Rightarrow A^*u_k = 0$$

$$\text{если } k = r+1, \text{ тогда } AA^*u_k = 0 \Rightarrow u_k^* AA^* u_k = 0 \Rightarrow (A^*u_k^*)(A^*u_k) = 0 \Rightarrow A^*u_k = 0$$

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

$$\text{если } k = 1, \dots, r, \text{ тогда } AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k, \text{ т.е.}$$

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

если $k = 1, \dots, r$, тогда $AA^*u_k = \sigma_k^2 u_k$, т.е.

$$A = PU$$

$$A^* = (P_U) = U^* P^*$$

$$AA^* = PUU^*P =$$

$$= 92$$

$$\rho = \sqrt{AA^T}$$

Для того оператор P непрерывен, а если А-нормали, то и оператор u непрерывен.

Funktion: $f = f(t_0, \dots, t_n)$, $t_i = f^{-1}(t_i)$

Тогда

$$u_{ek} = f_k$$

Шаг 4. U -унитарный оператор (опт.), т.е. он переводит

$P \geq 0$ $m \geq 0$ $A = P \cdot m$

$$m.k. \quad A_{ex} = \sigma_k t_k, m.e$$

$$\alpha \circ \text{onep} \circ \text{map} \quad \text{pu}(e_k) = p_{-k} = 6k + k$$

$$A = U \Sigma^* U^* = (U \Sigma U^*)$$

дружественность

тип

каждый элемент A и B принадлежит $A \cup B$ $\Rightarrow A \cup B \Rightarrow A \cup B$

Если A обратим, то $\sigma_k \neq 0 \Rightarrow \Delta$ обратим.

Итого $u = p^{-1}A$.

Frage 7: Steigern

Ст. Индексные обозначения

Devin

Стим выделяемые различные x, y, z .
Абсолютно определенно равен сумме. Равновесие

no urgency, compliance x_1, x_2, x_3

www.faircliff.com

[No we say: $\delta \text{ elements} \rightarrow X^r, r=1,2,3$

Объект конструируется из элементов первого набора.

 x_1, x_2, x_3 kann man direkt
$$u_1, u_2, u_3$$

Beim Eintrag: notwendig zählt an den Impressen